$$\Gamma^3_{11}(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0, \qquad (7)$$

из которого следует справедливость свойства 2.

3/. Из формулы (7) и равенств

$$d\vec{A}\big|_{\omega^2=0} = \omega^1\vec{e}_1, \qquad d\vec{e}_1\big|_{\omega^1=0} = \Gamma^1_{12}\vec{e}_1\omega^2$$

получаем свойство 3.

4/.Так как

$$d\vec{A}\big|_{\omega^2=0} = \omega^1\vec{e}_1, \qquad d\vec{e}_2\big|_{\omega^2=0} = m\vec{e}_1\omega^1,$$

$$d\vec{e}_3\big|_{\omega^2=0} = n\vec{e}_1\omega^1, \qquad d\vec{e}_1\big|_{\omega^1=0} = \Gamma^1_{12}\vec{e}_1\omega^2,$$

то инфинитезимальные перемещения всех точек эллипса C_1 при $\omega^2=0$ происходят в одном и том же направлении, определяемом вектором $\vec{e}_1$. Линия центров эллипсов не является прямой, следовательно, все эллипсы C_1 принадлежат каналовой поверхности.

5/. В силу равенств (5),(6) условия

$$\begin{cases} \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta = 0, & \alpha,\beta = 1,2,3, \ \alpha \neq \beta, \\ \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^\alpha_\beta = 0, \end{cases}$$

указанных аффинных расслоений тождественно удовлетворяются. Теорема доказана.

Список литературы

1.Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3.Калининград,1973,с.41-49.

2.Ткач Г.П. О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3.Калининград,1973,с.143-152.

3.Фунтикова Т.П.Одномерные многообразия эллипсов в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.10,Калининград, 1979,с.131-135.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

В.Н. Худенко

СВЯЗНОСТЬ В ГЛАВНОМ РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

В n-мерном проективном пространстве рассматривается связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. Введено композиционное оснащение этого многообразия. Получена геометрическая характеристика подобъектов и объекта связности.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим невырожденное h-параметрическое многообразие $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p. С этим многообразием ассоциируется многообразие B^h_n обобщенных пространственных элементов. Обобщенным пространственным элементом $(\mathcal{L}_\ell, \mathcal{L}_{p+1})$ согласно [3] будем называть проективную плоскость $\mathcal{L}_{p+1}$ (p-мерной квадрики Q_p) вместе с инцидентной ей подплоскостью $\mathcal{L}_\ell$, которая возникает внутренним образом, например, как плоскость, натянутая на соответствующее количество характеристических точек квадрики.

Поместим вершины A_μ репера $R=\{A_1,\ldots,A_{n+1}\}$ в плоскость $\mathcal{L}_\ell$, вершины $A_{\bar a}$ вне плоскости $\mathcal{L}_\ell$, но в плоскости $\mathcal{L}_{p+1}$ и вершины A_a вне плоскости $\mathcal{L}_{p+1}$.

Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\mu,\nu = 1,2,3,\ldots,\ell+1;$$
$$\bar a,\bar b,\bar c = \ell+2,\ell+3,\ldots,p+2;$$
$$i = 1,2,\ldots,h; \qquad a = p+3,\ldots,n+1.$$

Тогда уравнения плоскостей $\mathcal{L}_{p+1}$ и $\mathcal{L}_\ell$ запишутся соответственно в виде:

$$x^a = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} x^a = 0, \\ x^{\bar a} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система дифференциальных уравнений многообразия B_h^* обобщенных пространственных элементов примет вид

$$\omega_\mu^{\bar a} = M_{\mu i}^{\bar a} \tau^i, \tag{3}$$

$$\omega_\mu^a = \Lambda_{\mu i}^a \tau^i, \quad \omega_{\bar b}^a = \Lambda_{\bar b i}^a \tau^i. \tag{4}$$

Здесь τ^i инвариантные формы аналитической группы преобразований h-мерного пространства параметров, удовлетворяющие системе уравнений

$$D\tau^i = \tau^k \wedge \tau_k^i,$$

$$D\tau_i^j = \tau_i^k \wedge \tau_k^j + \tau^k \wedge \tau_{ik}^j.$$

. . . .

Замкнем (3) и (4), получим

$$\nabla M_{\mu i}^{\bar a} + \Lambda_{\mu i}^a \omega_a^{\bar a} \equiv 0 \pmod{\tau^i}, \tag{5}$$

$$\nabla \Lambda_{\mu i}^a \equiv 0 \pmod{\tau^i},$$

$$\nabla M_{\bar a i}^a - \Lambda_{\mu i}^a \omega_{\bar a}^\mu \equiv 0 \pmod{\tau^i}.$$

Дифференциальный оператор ∇ здесь действует по закону

$$\nabla \Lambda_{\mu i}^a = d\Lambda_{\mu i}^a - \Lambda_{\nu i}^a \omega_\mu^\nu + \Lambda_{\mu i}^b \omega_b^a - \Lambda_{\mu j}^a \tau_i^j.$$

С многообразием B_h^*, ассоциируется главное расслоение $G(B_h^*)$ со структурными уравнениями

$$D\tau^i = \tau^j \wedge \tau_j^i,$$

$$D\omega_\mu^\nu = \omega_\mu^{\nu_1} \wedge \omega_{\nu_1}^\nu + \tau^i \wedge \omega_{\mu i}^\nu, \quad D\omega_{\bar b}^{\bar a} = \omega_{\bar b}^{\bar c} \wedge \omega_{\bar c}^{\bar a} + \tau^i \wedge \omega_{\bar b i}^{\bar a} \tag{6}$$

$$D\omega_{\bar b}^\nu = \omega_{\bar b}^\mu \wedge \omega_\mu^\nu + \omega_{\bar b}^{\bar a} \wedge \omega_{\bar a}^\nu + \tau^i \wedge \omega_{i\bar b}^\nu,$$

$$D\omega_b^\nu = \omega_b^\mu \wedge \omega_\mu^\nu + \omega_b^{\bar a} \wedge \omega_{\bar a}^\nu + \omega_b^a \wedge \omega_a^\nu,$$

$$D\omega_b^{\bar a} = \omega_b^{\bar b} \wedge \omega_{\bar b}^{\bar a} + \omega_b^a \wedge \omega_a^{\bar a} + \tau^i \wedge \omega_{ib}^{\bar a},$$

$$D\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b + \tau^i \wedge \omega_{ia}^b,$$

где

$$\omega_{\mu i}^\nu = M_{\mu i}^{\bar a} \omega_{\bar a}^\nu + \Lambda_{\mu i}^a \omega_a^\nu, \quad \omega_{\bar b i}^\nu = \Lambda_{\bar b i}^a \omega_a^\nu,$$

$$\omega_{ib}^{\bar a} = -M_{\mu i}^{\bar a} \omega_b^\mu, \quad \omega_{\bar b i}^{\bar a} = \Lambda_{\bar b i}^a \omega_a^{\bar a} - M_{\nu i}^{\bar a} \omega_{\bar b}^\nu,$$

$$\omega_{ib}^a = -\Lambda_{\bar b i}^a \omega_b^{\bar b} - \Lambda_{\nu i}^a \omega_b^\nu.$$

Базой главного расслоения $G(B_h^*)$ является многообразие B_h^* (или область пространства параметров), а типовым слоем подгруппа стационарности обобщенного пространственного элемента (L_{p+1}, L_ℓ).

В главном расслоении $G(B_h^*)$ введем связность по Г.Ф.Лаптеву с помощью поля объекта связности $\Gamma = (\Gamma_{\mu i}^\nu, \Gamma_{\bar b i}^\nu, \Gamma_{\bar a i}^b, \Gamma_{bi}^\nu, \Gamma_{bi}^{\bar a}, \Gamma_{bi}^a)$ на базе B_h^*

$$\nabla \Gamma_{\mu i}^\nu + \omega_{\mu i}^\nu = \Gamma_{\mu ij}^\nu \tau^j, \quad \nabla \Gamma_{\bar b i}^{\bar a} + \omega_{\bar b i}^{\bar a} = \Gamma_{\bar b ij}^{\bar a} \tau^j,$$

$$\nabla \Gamma_{\bar b i}^\nu + \omega_{\bar b i}^\nu + \Gamma_{\bar b i}^{\bar a} \omega_{\bar a}^\nu - \Gamma_{\mu i}^\nu \omega_{\bar b}^\mu = \Gamma_{\bar b ij}^\nu \tau^j,$$

$$\nabla \Gamma_{bi}^\nu - \Gamma_{\mu i}^\nu \omega_b^\mu + \Gamma_{bi}^{\bar a} \omega_{\bar a}^\nu - \Gamma_{\bar a i}^\nu \omega_b^{\bar a} + \Gamma_{bi}^a \omega_a^\nu = \Gamma_{bij}^\nu \tau^j,$$

$$\nabla \Gamma_{bi}^{\bar a} + \Gamma_{bi}^a \omega_a^{\bar a} - \Gamma_{\bar b i}^{\bar a} \omega_b^{\bar b} + \omega_{ib}^{\bar a} = \Gamma_{bij}^{\bar a} \tau^j,$$

$$\nabla \Gamma_{bi}^a + \omega_{ib}^a = \Gamma_{bij}^a \tau^j.$$

Рассмотрим композиционное [1] оснащение многообразия B_h^*, которое состоит в присоединении к каждому обобщенному пространственному элементу (L_ℓ, L_{p+1}) плоскостей B, C, причем плоскость B -дополнительная к плоскости L_{p+1}, а плоскость C -дополнительная к плоскости L_ℓ внутри плоскости L_{p+1}. Зададим композиционное оснащение многообразия B_h^* с помощью систем точек

$$B_a = A_a + \lambda_a^\mu A_\mu + \lambda_a^{\bar b} A_{\bar b} \tag{8}$$

и

$$C_{\bar a} = A_{\bar a} + \nu_{\bar a}^\mu A_\mu. \tag{9}$$

Условия инвариантности оснащающих плоскостей запишутся в виде

$$\begin{cases} \nabla\lambda^{\mu}_{a}+\lambda^{\bar b}_{a}\,\omega^{\mu}_{\bar b}+\omega^{\mu}_{a}=\lambda^{\mu}_{ai}\tau^{i}, \\ \nabla\lambda^{\bar b}_{a}+\omega^{\bar b}_{a}=\lambda^{\bar b}_{ai}\,\tau^{i}, \end{cases} \qquad (10)$$

$$\nabla\nu^{\mu}_{\bar a}+\omega^{\mu}_{\bar a}=\nu^{\mu}_{\bar a i}\tau^{i}. \qquad (11)$$

Имеет место следующая

Т е о р е м а I. Композиционное оснащение многообразия B^{*}_{k} позволяет задать связность в главном расслоении $G(B^{*}_{k})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фундаментальный объект первого порядка $\Lambda=(\Lambda^{a}_{\mu i},\Lambda^{a}_{\bar b i},M^{\bar a}_{\mu i})$ многообразия B^{*}_{k}, оснащающие квазитензоры $\lambda\,(\lambda^{\mu}_{a},\lambda^{\bar a}_{a})$, $\nu=(\nu^{\mu}_{\bar a})$ позволяют охватить компоненты объекта связности по формулам:

$$\Gamma^{\nu}_{\mu i}=M^{\bar a}_{\mu i}\nu^{\nu}_{\bar a}+\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\nu}_{a}-\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar b}_{a}\nu^{\nu}_{\bar b},$$

$$\Gamma^{\bar a}_{\bar b i}=\Lambda^{a}_{\bar b i}\,\lambda^{\bar a}_{a}-M^{\bar a}_{\mu i}\nu^{\mu}_{\bar b}+\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar a}_{a}\nu^{\mu}_{\bar b},$$

$$\Gamma^{\nu}_{\bar b i}=\Lambda^{a}_{\bar b i}\,\lambda^{\nu}_{a}-M^{\bar a}_{\mu i}\nu^{\mu}_{\bar b}\nu^{\nu}_{\bar a}-\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar c}_{a}\nu^{\nu}_{\bar c}\,\nu^{\mu}_{\bar b},$$

$$\Gamma^{a}_{b i}=-\Lambda^{a}_{\bar b i}\lambda^{\bar b}_{b}-\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\mu}_{b}, \qquad (12)$$

$$\Gamma^{\bar a}_{b i}=M^{\bar a}_{\mu i}\nu^{\mu}_{\bar b}\lambda^{\bar b}_{b}-\Lambda^{a}_{\bar b i}\lambda^{\bar a}_{a}\lambda^{\bar b}_{b}-\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar a}_{a}\lambda^{\bar b}_{b}\nu^{\mu}_{\bar b}-M^{\bar a}_{\mu i}\lambda^{\mu}_{b},$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\nu}_{b i}={}&-M^{\bar a}_{\mu i}\nu^{\nu}_{\bar a}\lambda^{\mu}_{b}-\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\nu}_{a}\lambda^{\mu}_{b}+M^{\bar a}_{\mu i}\nu^{\mu}_{\bar b}\nu^{\nu}_{\bar a}\lambda^{\bar b}_{b}+\\ &+\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar c}_{a}\nu^{\nu}_{\bar c}\nu^{\mu}_{\bar b}\lambda^{\bar b}_{b}-\Lambda^{a}_{\bar b i}\lambda^{\bar b}_{b}\lambda^{\nu}_{a}+M^{\bar a}_{\mu i}\lambda^{\mu}_{b}\nu^{\nu}_{\bar a}+\\ &+\Lambda^{a}_{\bar b i}\lambda^{\bar a}_{a}\nu^{\nu}_{\bar a}+\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar a}_{a}\nu^{\mu}_{\bar b}\nu^{\nu}_{\bar a}-\Lambda^{a}_{\bar b i}\lambda^{\bar a}_{a}\lambda^{\bar b}_{b}\nu^{\nu}_{\bar a}-\Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\mu}_{b}\lambda^{\bar a}_{a}\nu^{\nu}_{\bar a}.\end{aligned}$$

Из соотношений (I2) и следует утверждение теоремы.

Используя соотношения (8),(9),(I2),получим

$$dC_{\bar a}=\widetilde{\omega}^{\bar b}_{\bar a}C_{\bar b}+(\ldots)^{\nu}_{\bar a}A_{\nu}+(\ldots)^{a}_{\bar a}B_{a}, \qquad (13)$$

где

$$\widetilde{\omega}^{\bar b}_{\bar a}=\omega^{\bar b}_{\bar a}-\Gamma^{\bar b}_{\bar a i}\tau^{i}. \qquad (14)$$

Из равенств (13),(14) следует

Т е о р е м а 2. Подобъект $\Gamma_1=\{\Gamma^{\bar b}_{\bar a i}\}$ объекта Γ характеризуется проектированием на оснащающую плоскость C смежной с ней плоскости $C+dC$ из центра $L_{\ell}+B$.

Аналогично доказываются утверждения:

Т е о р е м а 3. Подобъект $\Gamma_2=\{\Gamma^{\nu}_{\mu i}\}$ объекта связности Γ характеризуется проектированием на плоскость L_{ℓ} смежной с ней плоскости $L_{\ell}+dL_{\ell}$ из центра $C+B$.

Т е о р е м а 4. Подобъект $\Gamma_3=\{\Gamma^{b}_{ai}\}$ объекта связности Γ характеризуется проектированием на плоскость B смежной с ней плоскости $B+dB$ из центра $L_{\ell}+C$.

Будем говорить,что плоскость переносится параллельно в связности,определяемой подобъектом Γ^{1} объекта связности Γ,если ковариантный дифференциал [2] квазитензора (задающего эту плоскость) относительно связности Γ^{1} равен нулю.

Преобразуем соотношения (I3) к виду

$$dC_{\bar a}=D\nu^{\mu}_{\bar a}A_{\mu}+(\ldots)^{\bar c}_{\bar a}C_{\bar c}+(\ldots)^{b}_{\bar a}B_{b}. \qquad (14)$$

Здесь

$$D\nu^{\mu}_{\bar a}=d\nu^{\mu}_{\bar a}+\nu^{\nu}_{\bar a}\widetilde{\omega}^{\mu}_{\nu}-\nu^{\mu}_{\bar b}\widehat{\omega}^{\bar b}_{\bar a}+\widetilde{\omega}^{\mu}_{\bar a}$$

ковариантный дифференциал квазитензора $\nu=(\nu^{\mu}_{\bar a})$,определяющего оснащающую плоскость C,а волной обозначены следующие формы связности

$$\widetilde{\omega}^{\mu}_{\nu}=\omega^{\mu}_{\nu}-\Gamma^{\mu}_{\nu i}\tau^{i};\quad \widetilde{\omega}^{\bar b}_{\bar a}=\omega^{\bar b}_{\bar a}-\Gamma^{\bar b}_{\bar a i}\tau^{i};\quad \widetilde{\omega}^{\mu}_{\bar a}=\omega^{\mu}_{\bar a}-\Gamma^{\mu}_{\bar a i}\tau^{i}.$$

Из соотношений (I4) следует утверждение

Т е о р е м а 5. Оснащающая плоскость C переносится параллельно в связности $\Gamma^{1}=\{\Gamma^{\nu}_{\mu i},\Gamma^{\bar a}_{\bar b i},\Gamma^{\nu}_{\bar a i}\}$ тогда и только тогда,когда она смещается в плоскости,натянутой на нее и оснащающую плоскость B.

Аналогично можно доказать утверждения

Т е о р е м а 6. Оснащающая плоскость B переносится параллельно в связности $\Gamma'' = \{\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{c}i}, \Gamma^{a}_{ei}, \Gamma^{a}_{ei}\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости, натянутой на нее и плоскость $'L_e$.

Т е о р е м а 7. Оснащающую плоскость B нельзя перенести параллельно в связности

$$\Gamma''' = \{\Gamma^{\nu}_{\mu i}, \Gamma^{a}_{ei}, \Gamma^{\mu}_{ei}, \Gamma^{\bar{a}}_{\bar{c}i}, \Gamma^{a}_{ei}\}.$$

Список литературы

1. Норден А.П. Теория композиций.-В кн.: Проблемы геометрии. М., 1976, 10, с. 117-145.

2. Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I2, Калининград, 1981, с. 126-130.

3. Buzau W. Проективная классификация грассмановых соотношений и определение минимальных моделей совокупностей обобщенных пространственных элементов. Ann. math. pura ed appl, 1953, ар 434, 1с. 133-160.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I6 1985

УДК 514.75

В.П.Ц А П Е Н К О

СВЯЗНОСТЬ В МНОГООБРАЗИИ ПАР ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОМ ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ V_{n-1}

В n-мерном проективном пространстве продолжается [1] изучение гиперконгруэнций V_{n-1} -(n-1)-параметрических невырожденных многообразий пар фигур (P,Q), где Q - гиперквадрика, а P - неинцидентная ей точка. Обозначим L_{n-1} - гиперплоскость, полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q, T_{n-1} - гиперплоскость, касательную к гиперповерхности S_{n-1}, описанной точкой P, а $\mathfrak{M}$ - многообразие, порожденное парой гиперплоскостей L_{n-1} и T_{n-1}, ассоциированное с гиперконгруэнцией V_{n-1}.

Подвижной репер $R = \{A, A_\alpha, A_n\}$ специализируем следующим образом: вершину $A \equiv A_0$ совместим с точкой P, вершины A_α ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n-1$) поместим в ($n$-2)-мерное пересечение M_{n-2} гиперплоскостей L_{n-1} и T_{n-1}, а вершину A_n - в гиперплоскость L_{n-1} так, чтобы $A_n \notin M_{n-2}$. Относительно репера R гиперквадрика Q задается уравнением:

$a_{ij} x^i x^j + (x^0)^2 = 0$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Система уравнений Пфаффа гиперконгруэнции V_{n-1} в репере R запишется в виде:

$$\omega^0_i = \mu_{i\beta}\,\omega^\beta_0, \quad \omega^n_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_0 \; (\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}),$$

$$\omega^n_0 = 0, \quad \nabla a_{ij} = a_{ij\beta}\,\omega^\beta_0.$$

Продолжая эту систему, получим

$$\nabla \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0,$$

$$\nabla \mu_{n\beta} = \mu_{n\beta}(\omega^n_n - \omega^0_0) + \mu_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_n + \mu_{n\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0,$$

$$\nabla \Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta}(\omega^0_0 - \omega^n_n) + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0,$$